



TITLE:

# 箱の中の熱対流: 閉領域を伝わる波 (波の非線形現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

足立, 高弘; 水島, 二郎

---

CITATION:

足立, 高弘 ...[et al]. 箱の中の熱対流: 閉領域を伝わる波(波の非線形現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 1996, 949: 148-158

ISSUE DATE:

1996-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60295>

RIGHT:

## 箱の中の熱対流—閉領域を伝わる波

同志社大・工 足立 高弘 (Takahiro ADACHI)

同志社大・工 水島 二郎 (Jiro MIZUSHIMA)

### 1 はじめに

水平に置かれた矩形容器に満たされた流体の下面を熱することにより上下面に温度差を与えると、ある臨界値でピッチフォーク分岐が生じベナール対流が発生することはよく知られている。さらに温度差を大きくしていくと、何度かのピッチフォーク分岐を経てホップ分岐が生じるか、あるいは直接にホップ分岐が生じることが予想される。ホップ分岐が生じるとリミットサイクルに巻き付く周期解が現れる。例えば、平面ポアズイユ流ではそのような振動は T-S 波によってもたらされ、攪乱波が流れの下流へ伝播する。ところで閉領域でホップ分岐が生じた場合、流れ場および攪乱波の伝播の様子はどのようなになるかという問題は非常に興味深い。そこで、本研究では閉領域における熱対流の発生からホップ分岐により生ずる攪乱波の伝播までを詳しく調べる。

本来、ベナール対流は 3 次元運動であり、有限な直方体容器中では短い辺に平行なロール形が選ばれることが報告されているが、<sup>1)</sup> 2 次元性を仮定した研究がこれまで多くなされてきた。<sup>2,3)</sup> 2 次元矩形容器中でのベナール対流の発生に関するより詳しい研究は最近でも Mizushima<sup>4)</sup> により活発に行われている。また、発生した熱対流の安定性<sup>5)</sup> および数値シミュレーション<sup>6)</sup> の研究も、2 次元性の仮定の下で行われている。

ここでは、閉領域中に発生した波が伝播する様子を 2 次元性を仮定し、数値シミュレーションと安定性理論の 2 通りの手法を用いて調べる。

### 2 基礎方程式と境界条件

高さ  $d$ 、幅  $L$  の矩形容器に満たされた流体を考える。容器の上下面および左右両面は完全熱伝導性をもつ固体壁でできているものとする。容器の下面を一定の温度  $T_0 + \delta T/2$ 、上面をそれよりも低い温度  $T_0 - \delta T/2$  に保つ。座標系は箱の中心を通り水平方向に  $x$  軸、鉛直方向に  $z$  軸をとる。流れ場は二次元的であると仮定する。このとき、浮力項を除いては流体の物質的な性質は変わらないとするブジネスク近似を用いると、流れ関数  $\psi$  と温度の熱伝導解からのずれ  $\theta$  を支配する方程式は、無次元形で次のように書くことができる。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - P \Delta^2 \psi + P Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} = J(\psi, \Delta \psi), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + \frac{\partial \psi}{\partial x} = J(\psi, \theta). \quad (2)$$

ここで、 $J(f, g) \equiv \partial(f, g)/\partial(x, z)$  および  $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$  はそれぞれヤコビアンおよび  $(x, z)$  平面における二次元ラプラシアンである。また、流れの場を特徴づける無次元パラメータは、次式で定義されるレイリー数  $Ra$ 、プラントル数  $P$  および矩形容器のアスペクト

比  $A = L/d$  である.

$$Ra = \frac{\gamma g \delta T d^3}{\nu \kappa}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}. \quad (3)$$

上式で,  $\kappa$  は流体の熱拡散係数,  $\nu$  は動粘性係数,  $\gamma$  は熱膨張係数,  $g$  は重力加速度である. 以下では,  $P = 7$  (水) の場合についての結果を詳しく述べる.

容器の上下面および左右両面は完全熱伝導性をもつ固体壁でできているものと仮定しているので境界条件は

$$\begin{aligned} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm A/2, \\ \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm 1/2 \end{aligned} \quad (4)$$

となる.

### 3 発展方程式の数値シミュレーション

発展方程式(1)および(2)の数値シミュレーションを行い解の挙動を調べる. 数値計算においては, 流れ関数  $\psi(x, z, t)$  および温度  $\theta(x, z, t)$  をチェビシェフ多項式を用いて, 以下のように展開する.

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{m=0}^{2M+1} \sum_{n=0}^{2N+1} a_{mn}(t) \tilde{T}_m(2x/A) \tilde{T}_n(2z), \\ \theta &= \sum_{m=0}^{2M+1} \sum_{n=0}^{2N+1} b_{mn}(t) \tilde{T}_m(2x/A) \tilde{T}_n(2z). \end{aligned} \quad (5)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \tilde{T}_m(x) &= (1-x^2)^2 T_m(x), \\ \tilde{T}_m(x) &= (1-x^2) T_m(x) \end{aligned}$$

は  $m$  次のチェビシェフ多項式  $T_m(x)$  を用い, 境界条件を満たすように作られた変形チェビシェフ多項式を表す.  $M$  および  $N$  は, それぞれ  $x$  方向および  $z$  方向に関する展開の打ち切りパラメータである. 展開係数  $a(t)_{mn}$  および  $b(t)_{mn}$  の総数は  $2 \times (2M+2) \times (2N+2)$  となる. これらの展開式を方程式(1), (2)に代入しコロケーション法を用いることにより, 展開係数  $a_{mn}(t)$  および  $b_{mn}(t)$  に対する発展方程式が得られ, 次式で表されるような1階の常微分方程式に帰着される.

$$\mathbf{A} \frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{B} \mathbf{X}. \quad (6)$$

ここで,  $\mathbf{X} = {}^t(a_{00}(t), a_{01}(t), \dots, a_{2M+1, 2N+1}(t), b_{00}(t), b_{01}(t), \dots, b_{2M+1, 2N+1}(t))$  であり,  $\mathbf{A}$  および  $\mathbf{B}$  は  $2 \times \{(2M+2) \times (2N+2)\} \times 2 \times \{(2M+2) \times (2N+2)\}$  の行列を表す. コロケーションポイントは次式で定義される点を用いる.

$$x_i = \frac{A}{2} \cos\left(\frac{i+1}{2M+3}\pi\right), \quad (i = 0, 1, \dots, 2M+1),$$

$$z_i = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{i+1}{2N+3}\pi\right), \quad (i = 0, 1, \dots, 2N+1). \quad (7)$$

(10) 式を常微分方程式の初期値問題として解くために, 時間微分に関して4次のルンゲ・クッタ・ギル法を用いる. 解の挙動を特徴づける振幅としては, 次式で定義される  $(x, z) = (A/2 - 1/4, 0)$  における  $z$  方向の速度  $w_1$  を用いることにする.

$$w_1 = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \quad \text{at } (x, z) = \left(\frac{A}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad (8)$$

正方容器 ( $A = 1$ ) の場合について数値シミュレーションを行った. ただし, 初期条件は次のようにした.

$$a_{mn} = \begin{cases} 0.001 & \text{for } (m, n) = (0, 0) \\ 0 & \text{for } (m, n) \neq (0, 0) \end{cases} \quad (9)$$

$$b_{mn} = 0 \quad \text{for all } (m, n)$$

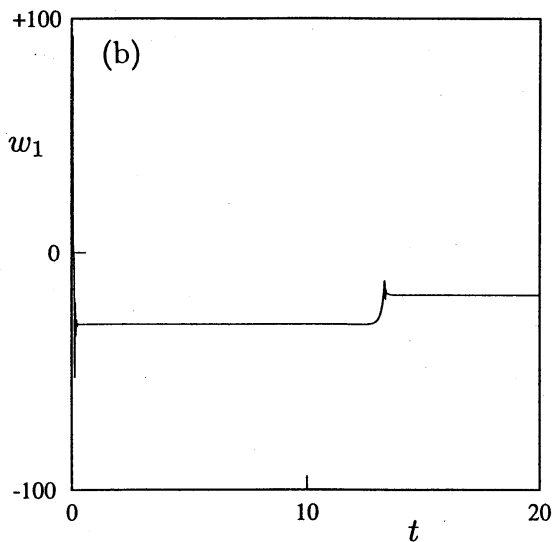
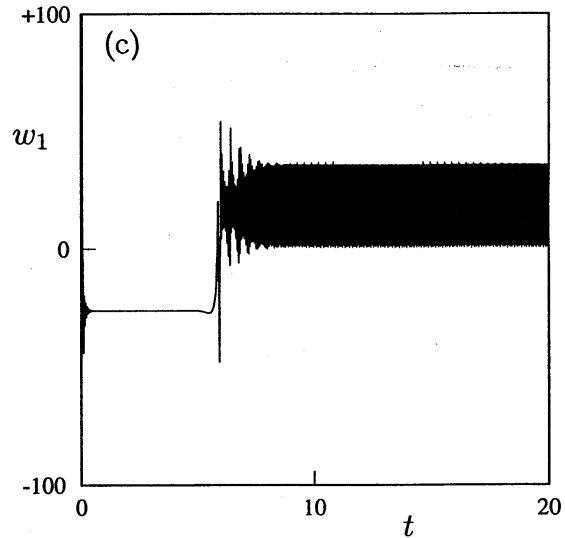
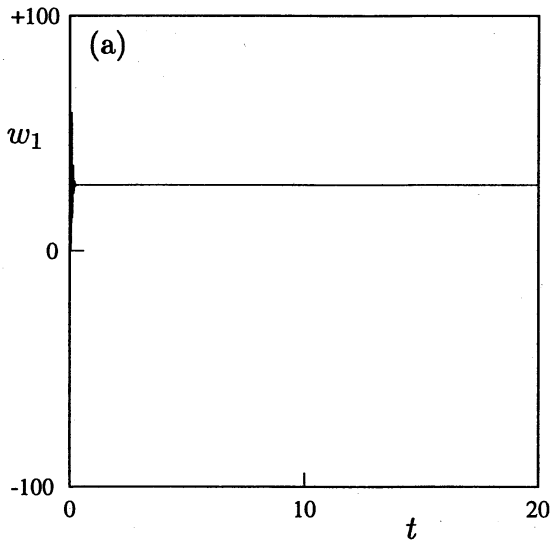


図2. 振幅  $w_1$  の時間発展 ( $A = 1$ ). (a)  $Ra = 20000$ , (b)  $Ra = 40000$ , (c)  $Ra = 47600$ .

図1に $w_1$ の時間変化を示す. 図1(a)は $Ra = 25000$ の場合であり,  $w_1$ は初期に何度か振動した後一定の値 $w_1 = 28.0$ に速やかに収束している. 図1(b)は $Ra = 40000$ の場合であり,  $w_1$ は一度 $w_1 = -30.6$ に収束した後振動が起こり新たな別の値 $w_1 = -18.2$ に収束している. 図1(c)は $Ra = 47600$ の場合であるが, ここでも $w_1$ は一度 $w_1 = -26.5$ に収束するが, その後 $w_1$ が $1.56 < w_1 < 35.9$ の範囲で周期的に変動する振動解が現れた. このように, 同じ初期条件から出発したにも関わらず, レイリー数 $Ra$ の増加に伴い3通りのケースが得られた. 以下では, これらの解の振る舞いがどのように説明できるかについて詳しく調べる.

## 4 静止状態の線形安定性

数値シミュレーションで得られた3通りの解の挙動を説明するために安定性理論を用いた解析を行う. 静止状態からの熱対流の発生は線形安定性理論を用いて計算される. すなわち, 静止状態は臨界レイリー数 $Ra_c$ で不安定となり熱対流が発生する. このとき, 安定性交替の原理が成立することを考慮すると, 静止状態の安定性を支配する方程式は, (1),(2)式を $\psi$  および  $\theta$  に関して線形化することにより次のようになる.

$$\Delta^2 \psi = Ra \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\Delta \theta = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (11)$$

ここで, (10), (11)式は $x$  および  $z$  方向に関して対称性を持つ. そこで, (4)式の境界条件の下で得られる解 $(\psi, \theta)$ を次のように流れ場の対称性により分類する.

$$\begin{aligned} (\text{aa}) \text{モード: } & (\psi(e, e), \theta(o, e)), & (\text{sa}) \text{モード: } & (\psi(o, e), \theta(e, e)), \\ (\text{as}) \text{モード: } & (\psi(e, o), \theta(o, o)), & (\text{ss}) \text{モード: } & (\psi(o, o), \theta(e, o)). \end{aligned}$$

ここで, 例えば $\psi(e, e)$ は $\psi$ が $x$ 方向および $z$ 方向にそれぞれ偶関数であることを表す. (aa)モードの流れ場は,  $x$ 方向および $z$ 方向に関して反対称であり, それぞれの方向に奇数個の渦が存在する.

数値計算においては,  $(\psi, \theta)$ を(5)式の展開を用い, コロケーション法により次式で表されるような行列の固有値問題に帰着させて線形臨界レイリー数を求める.

$$\mathbf{Aa} = Ra\mathbf{Bb},$$

$$\mathbf{Cb} = \mathbf{Da}.$$

ただし $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ はもはや時間に関して定数で,  $\mathbf{a} = {}^t(a_{00}, a_{01}, \dots, a_{2M+1, 2N+1})$  および  $\mathbf{b} = {}^t(b_{00}, b_{01}, \dots, b_{2M+1, 2N+1})$  であり,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  および  $\mathbf{D}$  は  $\{(2M+2) \times (2N+2)\} \times \{(2M+2) \times (2N+2)\}$  の行列を表す. 上述の対称性を考慮に入れると $\mathbf{a}$  および  $\mathbf{b}$  の総数は,  $2 \times (2M+2) \times (2N+2)$  から  $2 \times (M+1) \times (N+1)$  に減らすことができる.

対称性の異なる4つのモードについて数値計算の結果得られた線形臨界レイリー数を図2に示す. 図2ではアスペクト比 $0.1 < A < 10$ について, 第二不安定モードまでの臨界レイリー数をグラフにした. 図中の数字は $x$ 方向の渦の個数を表している. アスペクト比 $A$

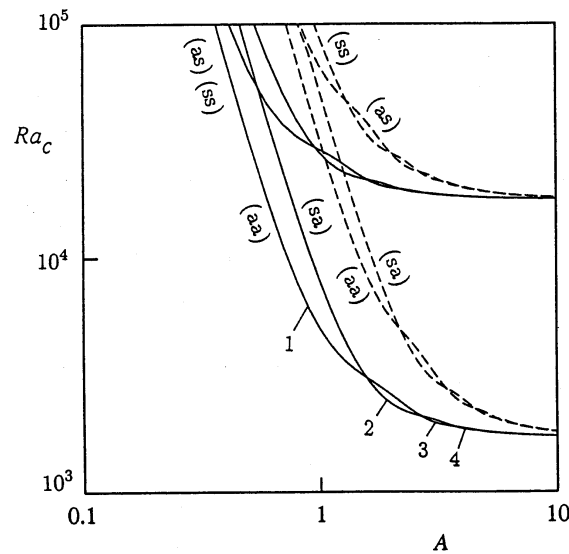


図1. 線形臨界レイリー数  $Ra_c$ . 実線は第一モード, 点線は第二モード.  $A$  はアスペクト比, 図中の数字は  $x$  方向の渦の数.

が小さいときは (aa) モードが臨界レイリー数を与え,  $A$  の値が 1.57 よりも大きくなると臨界モードは (sa) モードとなる. さらに  $A$  の値を大きくすると (aa) モードと (sa) モードが交互に臨界モードとなる. (as) モードと (ss) モードは  $A$  のどの値においても臨界モードとなることはない. (aa) モードと (sa) モードの中立曲線は互いに交わるが, 同じ対称性を持った曲線は決して交わらない.

数値シミュレーションで得られた解の挙動を説明するために,  $A = 1$  の場合に着目する. この場合, 臨界モードは (aa) モードであり,  $Ra_c = 5011.7$  である. これより大きなレイリー数では, 静止状態は不安定であり対流が発生する. そときの流れ場は, 容器の中心を回る大きな渦を一つ持つ. また, もう一つ重要なモードである (sa) モードは,  $Ra_c = 7972.3$  で不安定になる. そのときの流れ場は,  $x$  方向に二つの並んだ渦を持つ.

## 5 非線形平衡解とその安定性

ここでは  $Ra > Ra_c = 5011.7$  で発生する対流の非線形平衡解を数値的に求める. 平衡状態においては (1), (2) 式において  $\partial/\partial t = 0$  とおくことができ, 平衡解  $(\bar{\psi}, \bar{\theta})$  が満たす方程式は次のようになる.

$$-P\Delta^2\bar{\psi} + PRa\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x} = J(\bar{\psi}, \Delta\bar{\psi}), \quad (12)$$

$$-\Delta\bar{\theta} + \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x} = J(\bar{\psi}, \bar{\theta}). \quad (13)$$

方程式(12), (13)を(4)式の境界条件のもとで解くことにより平衡解  $(\bar{\psi}, \bar{\theta})$  が求められる.

以下では  $A = 1$  の場合のみを取り扱う. 静止状態における線形安定性解析の結果より, このとき箱の中で静止している流体は (aa) モードが最も早く不安定になり (sa) モードが続いて不安定になる. ここでは, これら2つのモードから生じる平衡解に焦点を当て解析を

進める。(aa)モードは  $Ra = 5011.7$  でピッチフォーク分岐を起こし不安定になるが、この(aa)モードは自分自身との非線形相互作用により(ss)モードを励起する。このとき、系は容器の中心に対して  $Z_2$  対称性を持ち、(aa)モードから生じる非線形平衡解は(aa)モードと(ss)モードを線形結合した以下に示すようなモードとなる。

$$\bar{\psi}(-x, -z) = \bar{\psi}(x, z), \quad \bar{\theta}(-x, -z) = -\bar{\theta}(x, z). \quad (14)$$

また、(sa)モードは  $Ra = 7972.3$  で不安定になるが、この場合は非線形相互作用によりすべてのモードを励起するので、(sa)モードから生じる非線形平衡解は  $Z_2$  対称性を持たない。

さらに、得られた平衡解  $(\bar{\psi}, \bar{\theta})$  の線形安定性を調べるため、流れ関数および温度を平衡解と攪乱の和として次式のようにおく。

$$\psi = \bar{\psi} + \psi', \quad \theta = \bar{\theta} + \theta' \quad (15)$$

ここで、 $\psi'(x, z, t)$  および  $\theta'(x, z, t)$  の時間依存性を  $\psi' = \hat{\psi}(x, z) e^{\lambda_0 t}$  および  $\theta' = \hat{\theta}(x, z) e^{\lambda_0 t}$  と仮定する。 $\lambda_0$  は線形増幅率を表す。(15) 式を(1), (2) 式に代入し、攪乱  $(\hat{\psi}, \hat{\theta})$  について線形化を行うと、攪乱を支配する方程式は

$$\lambda_0 \Delta \hat{\psi} - P \Delta^2 \hat{\psi} + P Ra \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} = J(\hat{\psi}, \Delta \bar{\psi}) + J(\bar{\psi}, \Delta \hat{\psi}), \quad (16)$$

$$\lambda_0 \hat{\theta} - \Delta \hat{\theta} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = J(\hat{\psi}, \bar{\theta}) + J(\bar{\psi}, \hat{\theta}) \quad (17)$$

となる。攪乱  $(\hat{\psi}, \hat{\theta})$  の境界条件は(4) 式と同じである。

平衡解の安定性は、この  $\lambda_0$  の符号によって決定される。すなわち、 $\lambda_0$  の実部を  $\text{Re}(\lambda_0)$ 、虚部を  $\text{Im}(\lambda_0)$  とすると、 $\text{Re}(\lambda_0) = \text{Im}(\lambda_0) = 0$  のとき、平衡解はピッチフォーク分岐を生じ、 $\text{Re}(\lambda_0) = 0$  のとき  $\text{Im}(\lambda_0) \neq 0$  ならば、振動数  $f = \text{Im}(\lambda_0)/(2\pi)$  をもったホップ分岐を生じる。平衡解が  $Z_2$  対称性を持つモードの場合には、攪乱を次に示すように  $Z_2$  対称性を持つ(s)モードと  $Z_2$  反対称性を持つ(a)モードに分けて考えることができる。

$$(s) \text{モード:} \quad \psi(-x, -z) = \psi(x, z), \quad \theta(-x, -z) = -\theta(x, z).$$

$$(a) \text{モード:} \quad \psi(-x, -z) = -\psi(x, z), \quad \theta(-x, -z) = \theta(x, z).$$

このとき、(s)モードは(14) 式で表わされる平衡解と同じ対称性を持ち、(a)モードは(sa)モードと(as)モードの線形結合で表される。

ここでも数値計算に際して(5) 式の展開とコロケーション法を用いる。平衡解をニュートン・ラフソン法により求め、得られた平衡解の安定性を以下のような固有値問題に帰着させて計算する。

$$\mathbf{Aa} = \lambda_0 \mathbf{Ba},$$

この場合も展開係数  $\mathbf{a} = {}^t(a_{00}, a_{01}, \dots, a_{2M+1, 2N+1}, b_{00}, b_{01}, \dots, b_{2M+1, 2N+1})$  は定数で、 $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  は  $2 \times \{(2M+2) \times (2N+2)\} \times 2 \times \{(2M+2) \times (2N+2)\}$  の行列を表す。係数の総数は平衡解および安定性の計算において  $Z_2$  対称性あるいは  $Z_2$  反対称性を考慮する場合に半分に減らすことができる。

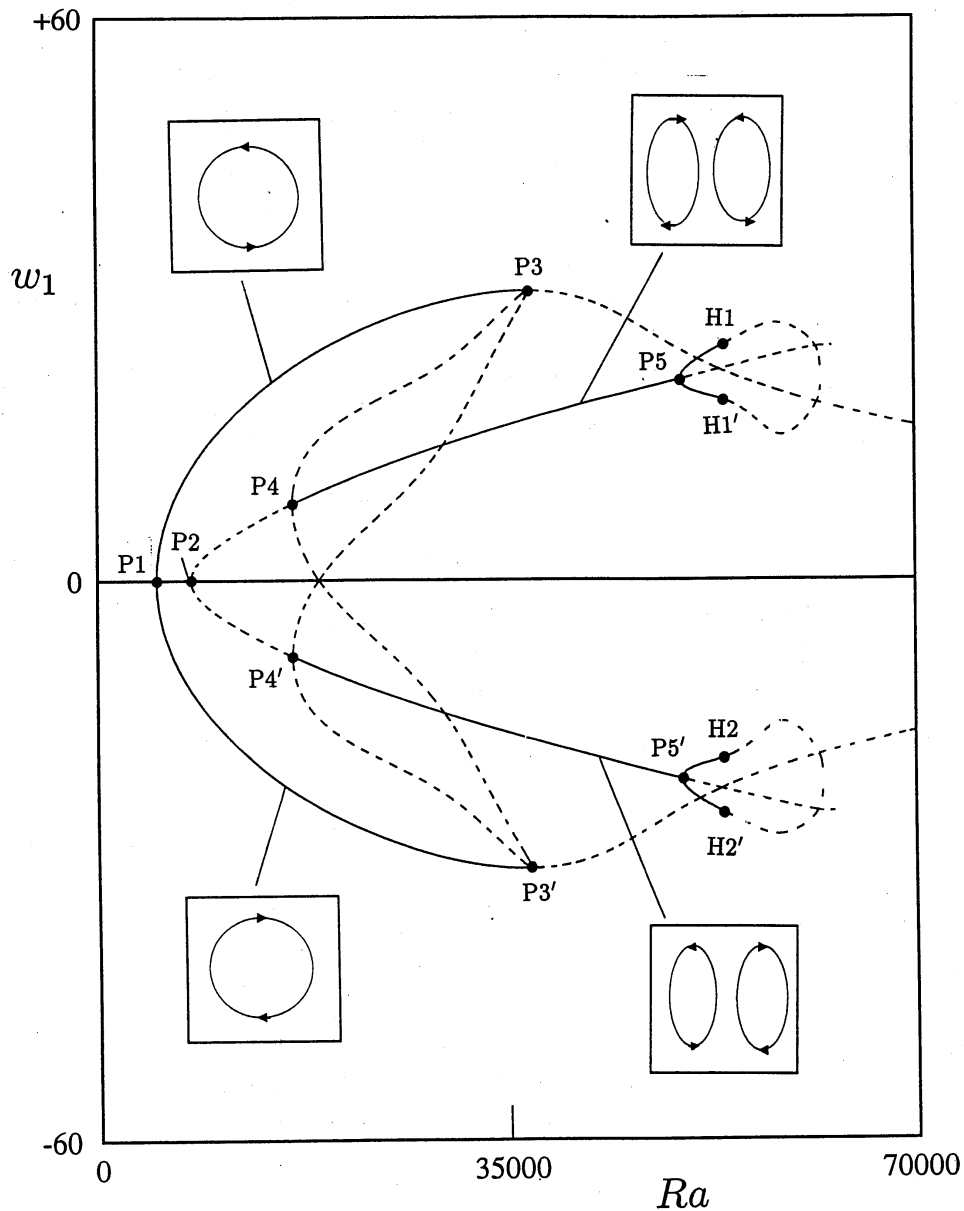


図3. 振幅 $w_1$ の分岐ダイアグラム( $A = 1$ ).

図3に $0 < Ra < 70000$ における非線形平衡解の分岐ダイアグラムを示す. 縦軸は(8)式で表される代表振幅 $w_1$ , 横軸はレイリー数 $Ra$ である. 実線は安定な平衡解, 点線は不安定な平衡解を表す. 振幅 $w_1$ の分布は, 系が $Z_2$ 対称性を持つ場合には $Ra$ 軸に対して対称であり,  $Z_2$ 対称性を持たない場合でも, ほぼ対称である.

レイリー数 $Ra$ が小さい間, 流体は静止状態にある. 静止状態は $w_1 = 0$ で表され, 図の $P1(Ra_c = 5011.7)$ で(aa)モードに対して不安定となり, そこから第一のブランチ( $P1-A, P1-A'$ )が分岐し対流が発生する.  $P1-A$ と $P1-A'$ では,  $w_1$ の符号が異なっているが, これは発生する対流の方向が逆であることを示しており, どちらの方向が選択されるかは初期条件の微妙な違いなどによる偶然に支配される. 第一のブランチ上の平衡解の流れ場は, 図に示すように中心に一つの大きな渦を持つモードである. この第一のブランチは,  $P3(Ra_c = 37046)$



でサブクリチカルピッチフォーク分岐を起こし不安定になる。P3で分岐した平衡解は不安定であり、P2( $Ra_c = 7972.3$ )から伸びるブランチにつながる。

P2は、静止状態が(sa)モードに対して不安定となる点で、そこから第二のブランチ(P2-B, P2-B')が分岐する。第二のブランチ上の平衡解の流れ場は、 $x$ 方向に二つの渦を持つモードである。この第二のブランチは、P4( $Ra_c = 16624$ )まで不安定であり、そこでピッチフォーク分岐を起こし安定になる。P4で分岐した平衡解は不安定であり、P3で分岐した不安定な解とつながる。さらに、安定な第二のブランチはP5( $Ra_c = 54041$ )でピッチフォーク分岐を起こし不安定になる。P5で分岐した平衡解は安定であり、H1( $Ra_c = 54229$ )でホップ分岐を起こし不安定となる。ここで、図のP3', P4', P5'ではそれぞれP3, P4, P5と同じ臨界レイリー数であり、H1', H2, H2'はH1と同じ臨界レイリー数であることをつけ加えておく。

この分岐図でP4とP3で示される点間のレイリー数に対しては、安定な平衡解が四つ(P1-P3, P1-P3', P4-P5, P4'-P5')存在する。その中で、どの状態が実現されるかは初期条件に依存する。またこの場合には、 $Ra$ を十分に小さい値から増加させるときと、十分大きい値から減少させるときとは同じ $Ra$ に対してとる状態が異なるヒステリシス現象が現れると考えられる。すなわち、 $Ra$ をP2よりも小さい点から増加させる場合には第一のブランチP1-P3(or P1-P3')上の解が実現されるが、P3(P3')でこの解は不安定になりP4-P5(or P4'-P5')上の平衡解に遷移する。逆に、 $Ra$ をP3とP5の間で示される値から減少させるときには第二のブランチP4-P5(or P4'-P5')上の解が実現されるが、P4(P4')でこの解は不安定となりP1-P3(or P1-P3')上の平衡解に遷移する。

ここでようやく§3の数値シミュレーションで得られた3通りの解の挙動を説明することができる。図1(a)の場合について、 $Ra = 25000$ は図3のP2とP4の間の値であり、そこでは安定な第一のブランチと不安定な第二のブランチが存在する。数値シミュレーションを行った結果は、P1-P3上の平衡解に速やかに収束している。図1(b)の $Ra = 40000$ は、図3のP3とP5の間の値であり、ここでも安定な第一のブランチと不安定な第二のブランチが存在する。数値シミュレーションの結果は、一度ある値に収束した後振動が起こり別の値に収束した。これは、はじめ第一のブランチ(P1-A')上の平衡解に向かったが、P3より大きなところでの $Ra$ に対してこの解は不安定なので、時間の経過とともに不安定性により振動が起り、安定な第二のブランチ上(P4'-P5')の平衡解へ向かい収束したものと考えられる。図1(c)の $Ra = 47600$ も、図3のP3とP5の間の値であり、はじめ第一のブランチ上(P1-A')の不安定な平衡解に向かうが、ここでも不安定性により振動が起り別の安定な解に向かう。この場合には、定常値には収束せず振動解が現れている。この振動解は、おそらく、H1で生じるホップ分岐かあるいはこの分岐ダイアグラムには現れていない臨界点でのホップ分岐がサブクリチカル分岐であり、そこから伸びる安定な振動解が現れているものと考えられる。以上をまとめると、(9)式で与えられる初期条件の下では、時間発展の解はまず第一のブランチに向かう。そこでもし、その解が安定ならばそのまま収束し、不安定ならば振動を起こし別の安定な解に向かうことになる。

## 6 攪乱波の伝播

数値シミュレーションから得られた振動解を平均流と攪乱に分ける．図4(a)に数値シミュレーションにおいて  $Ra = 47600$  で現われる振動解を時間平均したときの流れ場と，図4(b)に平衡解の直接計算で得られる第一ブランチで，ホップ分岐が生じる  $Ra = 49603$  での平衡解の流れ場をそれぞれ示す．図4(b)では， $Ra$  の増加に伴う非線形性の増大によって，第一のブランチ上の平衡解の線形臨界点P1では箱の中心に対称性の良い一つの大きな渦を持っていた流れ場に，対角線上に新たな渦が生じ対称性が破れている様子が見られる．さて，図4(a),(b)の2つの流れ場は同じモードであると思われる．すなわち，第一ブランチ上  $Ra = 49603$  で起こるホップ分岐がサブクリチカルで，その分岐した後の安定な振動解が， $Ra = 47600$  に現われていると考えられる．そこで，数値シミュレーションによって得られた振動解から時間平均による主流成分を引き去った攪乱と，(16)および(17)式から得られる，ホップ分岐が起こる臨界点での線形固有関数で表される攪乱を比較することにより，閉領域における攪乱波の伝播の様子を調べる．図5には，1/2周期を3分割した攪乱の流れ場を数値シミュレーションと安定性理論の二通りの方法から得られた結果についてそれぞれを示す．これらの図では流れ関数のある範囲を塗りつぶすことにより，伝播の様子を見やすくしてある．数値シミュレーションから得られた結果と安定性理論から得られた結果とでは流れ場のモードは異なるように見える．また，この図からは伝播波であるのか定在波であるのかを判別することも非常に難しい．攪乱波は熱対流の流れ方向に伝播するだろうという予想を持っていたのだが，現時点では現象を説明できる納得のいく結果を得ることはできなかった．さらに詳しく調べるためには，数値シミュレーションから得られた振動解と，ホップ分岐が生じた後の解との関係をより詳しく調べる必要がある．

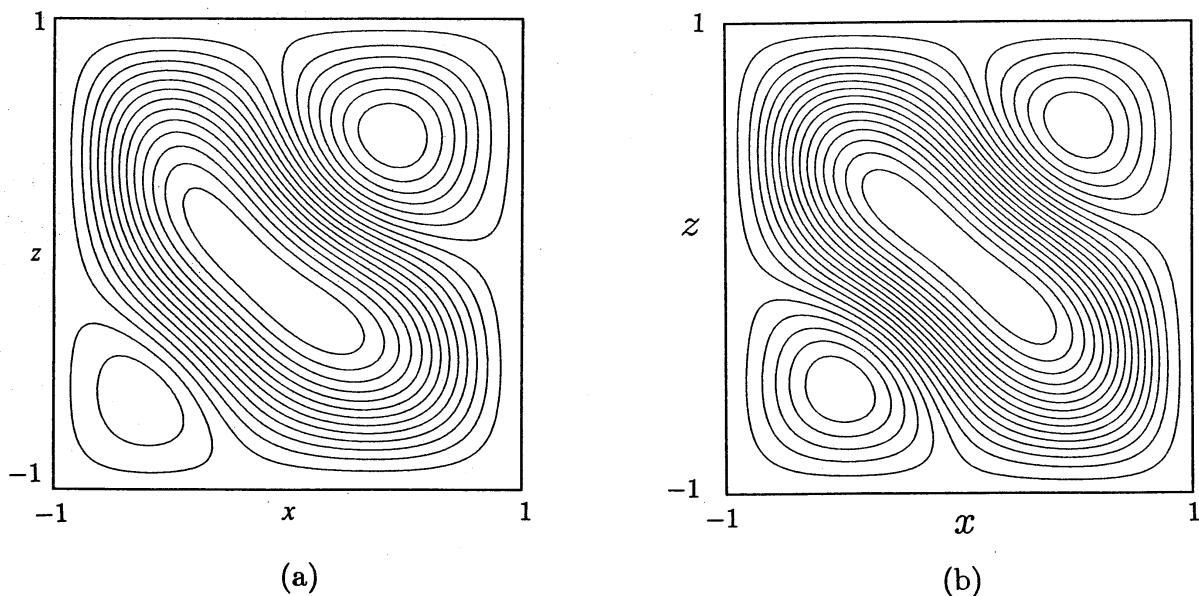


図4. 流れ場. (a) 数値シミュレーションから得られた平均場 ( $Ra = 47600$ ). (b) 直接計算から得られた平衡解による流れ場 ( $Ra = 49603$ ).

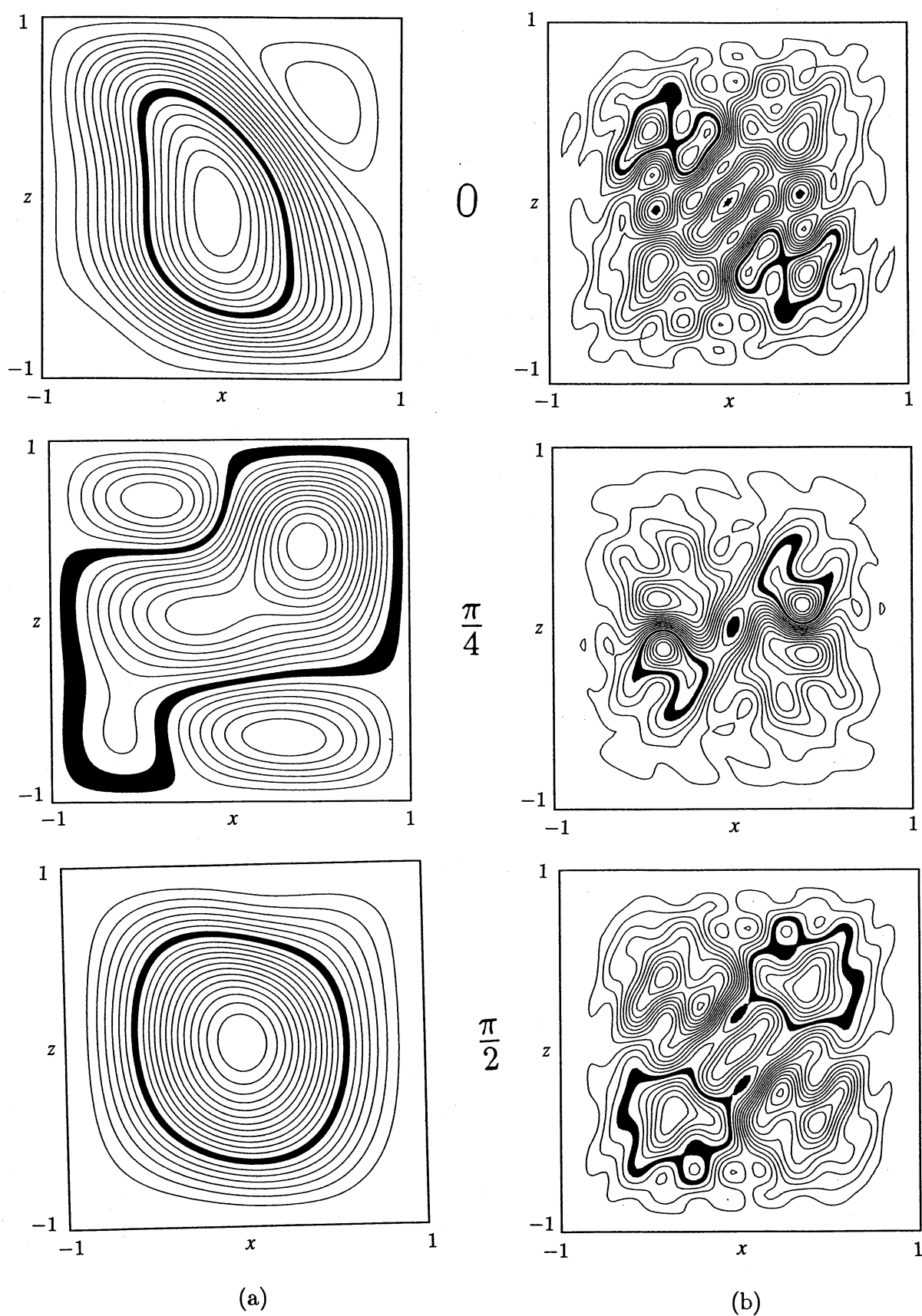


図5. 攪乱波の時間変化 (半周期分). (a) 数値シミュレーション得られた攪乱波 ( $Ra = 47600$ ). (b) 臨界点での線形固有関数からえられた攪乱波 ( $Ra = 49603$ ).

## 7 結論

閉領域に発生する熱対流の数値シミュレーションを行いその結果を、平衡解を直接に求めその安定性を調べた結果と比較した。また、発生する波の伝播の様子を考察した。

ある初期条件のもとに数値シミュレーションを行った結果、(1)速やかに定常値に収束する場合、(2)一度定常になった後、異なる定常値に収束する場合、および(3)振動解が現れる場合の3通りの解の挙動が得られた。これらの現象を説明するために安定性理論を用い、分岐ダイアグラムをかなり広い範囲で求めたところ数値シミュレーションにおける解の挙動を説明することができた。とくに平衡解が複数存在する場合には、その中のどの解が最終的に出現可能かは解の安定性を調べてみなければならないことがわかった。すなわち、安定な平衡解は到達可能であり、不安定な平衡解は到達することは可能であるが、十分な時間が経過すると不安定性により別の安定な解に離れていくことが明らかになった。また、複数の平衡解が存在し、そのどちらも安定な場合に解のヒステリシス現象が見られた。

閉領域に発生する攪乱波の伝播については、数値シミュレーションおよび安定性理論の両側面からの解析を試みたが、その機構の解明には至らなかった。しかし、サブクリチカルホップ分岐の存在が示唆されるなど、ある程度の理解は得られたものと思われる。

## References

- [1] S. H. Davis 1967 *J. Fluid Mech.*, **30**, 465-478.
- [2] W. Velte 1964 *Arch. Ration. Mech. Analysis*, **16**, 97-124.
- [3] N. Y. Lee, W. W. Schultz and J. P. Boyd 1989 *Int. J. Heat Mass Transfer*, **32**, 513-520.
- [4] J. Mizushima 1995 *J. Phys. Soc. Jpn.*, **64**, 2420-2432.
- [5] T. Adachi and J. Mizushima 1996 *J. Phys. Soc. Jpn.*, 投稿中.
- [6] I. Goldhirsch, R. B. Peltz and S. A. Orszag 1989 *J. Fluid Mech.*, **199**, 1.